Revista Transdisciplinar
Uma oportunidade para o Livre Pensar
Vol. 19 - Ano 10 - Nº 19 – 1º semestre/2022 ISSN 2317-8612
http://revistatransdisciplinar.com.br/ - www.artezen.org

# 3 – EQUAÇÃO A DERIVADAS PARCIAIS PARA UMA SOLUÇÃO GERAL DADA

**Gildemar C. Santos***

**Resumo**

Para compreender este artigo é necessário ter conhecimento das disciplinas Cálculo I, II, III e IV, ministrados nas faculdades de ciências exatas. Quando lecionamos Método das Características, que é um método para se achar soluções gerais de equações a derivadas parciais (EDP) de primeira ordem, é necessário elaborar equações para que os alunos pratiquem, encontrando a solução. Foi nesse processo que elaboramos este método, que fornece imediatamente a EDP para uma solução geral dada. Derivadas parciais são usadas para eliminar a função arbitrária que aparece na solução dada, e a equação surge como consequência natural.

O artigo visa principalmente professores que lecionem o Método das Características, e alunos que visem seu aprimoramento elaborando seus próprios exercícios.

## 1 - Introdução

O Método das Características é um método muito poderoso usado para encontrar soluções de equações diferenciais a derivadas parciais de primeira ordem, que conduz facilmente a soluções gerais, mesmo para certas equações não lineares. Geralmente os cursos de Matemática apresentam esse método de uma forma excessivamente rigorosa, que exige mais tempo para o aprendizado. O modo que aprendi, em algum livro cujo nome não lembro, uns 30 anos atrás, no entanto, é muito prático e rápido. Pode ser visto na vídeo-aula disponível no Youtube, no link https://youtu.be/f7kqtLVxR2A.

Lecionando esse tópico no Instituto de Física da Universidade Federal da Bahia, senti necessidade de elaborar problemas para que os alunos se exercitem, e daí cheguei naturalmente no resultado que apresento. Não é minha área de especialidade e não tenho referências bibliográficas sobre o que vai ser demonstrado aqui. Porém como todo o processo da dedução é muito fácil, creio que esse material deva existir por aí, mas não tenha a merecida divulgação. Espero que, ao trazer esse conhecimento para um público maior, minha contribuição seja efetiva.

Para praticar, sugerimos que o leitor use o

*** Gildemar Carneiro dos Santos** – Instituto de Física, UFBA. Doutor em Física pela Universidade de Nagoya – Japão (1990). Mestre em Física pela Universidade de Nagoya – Japão (1986). Mestre em Física pela Universidade de São Paulo (1982). Bacharel em Física pela Universidade de São Paulo (1979). Atualmente é professor adjunto da Universidade Federal da Bahia. Músico nas horas vagas, coordena a orquestra de amadores Ateneu Musical. Currículo Lattes: http://lattes.cnpq.br/9800581085946445 gildemar@ufba.br

resultado deste artigo para construir equações diferenciais a partir da solução dada. Assim será fácil verificar se chegaram ao resultado correto quando estudarem o Método das Características.

A demonstração no artigo é gradual, começando por casos mais fáceis, sempre ilustrados por exemplos.

## 2 - O método

O processo é análogo ao de equações diferenciais ordinárias (EDO). Nas soluções de EDO você tem uma constante de integração para cada derivada que aparece na equação. Então para chegar à equação a partir da solução, basta eliminar as constantes de integração por meio de derivadas. Por exemplo, se a solução geral de uma EDO for

$$y(x) = \frac{1}{c - x}, \tag{1}$$

onde *c* é a constante de integração, para achar a EDO correspondente basta isolar o *c*, e eliminá-lo derivando.

$$c = x + \frac{1}{y},$$

(2)

$$0 = 1 - \frac{y'}{y^2}.$$

Então a equação que tem (1) por solução geral é,

$$y' = y^2. \tag{3}$$

No caso de equações diferenciais parciais, no lugar da constante de integração, temos uma função arbitrária. Suponha que você queira achar a equação diferencial que tenha como solução geral:

$$u(x, y) = y + xF(x/y), \tag{4}$$

Antes, vamos abrir um parêntesis: Note que *F*(*x/y*), que é uma função arbitrária, pode ser escrita como $G(x/y)x/y$, o que transformaria (4) em

$$u(x, y) = y + yG(x/y). \tag{5}$$

Isso significa que há uma certa redundância nessas escolhas. Voltemos a (4). Na equação diferencial não deve aparecer *F* nem suas derivadas, visto que são funções arbitrárias. Derivamos então (4) com relação a *x* e também com relação a *y*, obtendo:

$$u_x = F + x\frac{1}{y}F',$$
$$u_y = 1 - x\frac{x}{y^2}F'. \tag{6}$$

*F'* é a derivada de *F* com relação ao seu argumento. Resolvendo esse sistema, encontramos *F* e *F'*:

$$F' = (1 - u_y)\frac{x^2}{y^2},$$
$$F = u_x - (1 - u_y)\frac{y}{x}. \tag{7}$$

Substituímos *F* em (4), e temos a equação que buscávamos:

$$u = y + x\left[u_x - (1 - u_y)\frac{y}{x}\right], \tag{8}$$

que simplifica para

$$xu_x + yu_y = u. \tag{9}$$

Essa equação, como requerido, tem por solução geral

$$u(x, y) = y + xF(x/y). \tag{10}$$

Estendendo para um escopo mais geral, o objetivo é, dadas as funções *g*, *h*, $r_i$, com *i* variando de 1 até um número inteiro *n* – 1, todas elas diferenciáveis pelo menos uma vez com relação aos seus argumentos,

$$g = g(x_1, x_2, \dots x_n, u),$$
$$h = h(x_1, x_2, \dots x_n, u), \tag{11}$$

$$r_i = r_i(x_1, x_2, \ldots x_n, u),$$

achar a equação cuja solução geral seja dada por

$$u = g + hF(r_1, r_2, \ldots, r_{n-1}), \tag{12}$$

onde *F* é uma função arbitrária, pelo menos uma vez diferenciável com relação aos seus argumentos. O jacobiano das funções $r_i$ não deve se anular, pois devem ser funções independentes entre si. Como só há uma função arbitrária, *F*, então a equação a ser obtida será uma equação diferencial de primeira ordem. Mostraremos que essa equação é dada pela relação entre os determinantes:

$$(u-g)\begin{vmatrix} h_1 + h_u u_1 & r_{1,1} + r_{1,u}u_1 & \ldots & r_{n-1,1} + r_{n-1,u}u_1 \\ h_2 + h_u u_2 & r_{1,2} + r_{1,u}u_2 & \ldots & r_{n-1,2} + r_{n-1,u}u_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ h_n + h_u u_n & r_{1,n} + r_{1,u}u_n & \ldots & r_{n-1,n} + r_{n-1,u}u_n \end{vmatrix}$$

$$= h\begin{vmatrix} u_1 - g_1 - g_u u_1 & r_{1,1} + r_{1,u}u_1 & \ldots & r_{n-1,1} + r_{n-1,u}u_1 \\ u_2 - g_2 - g_u u_2 & r_{1,2} + r_{1,u}u_2 & \ldots & r_{n-1,2} + r_{n-1,u}u_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ u_n - g_n - g_u u_n & r_{1,n} + r_{1,u}u_n & \ldots & r_{n-1,n} + r_{n-1,u}u_n \end{vmatrix}. \tag{13}$$

A notação usada acima é

$$u_j \equiv \frac{\partial u}{\partial x_j}, \text{etc}$$

$$r_{i,j} \equiv \frac{\partial r_i}{\partial x_j}. \tag{14}$$

A demonstração será feita de forma gradual, para facilitar a compreensão, iniciando com casos mais restritos e finalizando com a forma geral.

**3 - Caso 1 – Coeficientes com x e y, sem dependência em u.**

Queremos saber qual é a equação que tem por solução geral

$$u(x,y) = g(x,y) + h(x,y)F(r), \tag{15}$$

com *r* sendo uma função específica de x e y, e *F* uma função arbitrária de *r*. Chamaremos *g*, *h* e *r* de coeficientes, e serão dados do problema. Sendo arbitrária, nem *F* nem suas derivadas deverão aparecer na equação diferencial, que será escrita em termos das derivadas de *u*.

Para determinar *F* e suas derivadas, derivamos *u* com relação às variáveis *x* e *y*,

$$\begin{aligned} u_x &= g_x + h_x F + h r_x F', \\ u_y &= g_y + h_y F + h r_y F', \end{aligned} \tag{16}$$

onde

$$F' = \frac{dF}{dr}. \tag{17}$$

Em forma matricial, o sistema de equações (16) fica

$$\begin{pmatrix} u_x - g_x \\ u_y - g_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_x & r_x \\ h_y & r_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F \\ hF' \end{pmatrix}. \tag{18}$$

Precisamos achar *F*, para, substituindo em (15), encontrarmos a equação desejada. Multiplicando ambos os lados pela matriz inversa da matriz quadrada do lado direito, temos

$$\begin{pmatrix} F \\ hF' \end{pmatrix} = \frac{1}{h_x r_y - h_y r_x} \begin{pmatrix} r_y & -r_x \\ -h_y & h_x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_x - g_x \\ u_y - g_y \end{pmatrix}, \tag{19}$$

e daí determinamos

$$F = \frac{r_y(u_x - g_x) - r_x(u_y - g_y)}{h_x r_y - h_y r_x}. \tag{20}$$

O denominador é o jacobiano de *h* e *r*. Se o jacobiano se anular, significa que *h* é uma função de *r* e pode ser incorporado ao *F*. Nesse caso não faria sentido ter um *h* multiplicando, e por isso podemos assegurar que esse denominador não se anula, desde que assumamos que ele não seja constante. Se *h* for constante, então, para que o lado esquerdo de (20) não divirja, o numerador também terá que ser zero, e esse numerador nulo é que será a equação procurada.

Substituindo em (15), chegamos na EDO em *u*:

$$u = g + h\frac{r_y(u_x - g_x) - r_x(u_y - g_y)}{h_x r_y - h_y r_x}. \tag{21}$$

Essa equação fica numa forma mais elegante quando escrita usando determinantes:

$$(u - g)\begin{vmatrix} h_x & r_x \\ h_y & r_y \end{vmatrix} = h\begin{vmatrix} u_x - g_x & r_x \\ u_y - g_y & r_y \end{vmatrix}. \tag{22}$$

Por exemplo, se escolhermos

$$\begin{gathered} g = x^2, \\ h = y, \\ r = x + y, \end{gathered} \tag{23}$$

então

$$\begin{aligned} g_x &= 2x, & g_y &= 0, \\ h_x &= 0, & h_y &= 1, \\ r_x &= 1, & r_y &= 1, \end{aligned} \tag{24}$$

e substituirmos na equação (22), chegamos na equação

$$(u - x^2)\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = y\begin{vmatrix} u_x - 2x & 1 \\ u_y & 1 \end{vmatrix},$$

$$u_x - u_y = 2x - \frac{(u - x^2)}{y}, \tag{25}$$

cuja solução geral vem de (15) e (23),

$$u = x^2 + yF(x+y). \tag{26}$$

De fato, como

$$\begin{aligned} u_x &= 2x + yF', \\ u_y &= F + yF', \end{aligned} \tag{27}$$

substituindo na equação:

$$\begin{aligned} u_x - u_y &= \frac{2xy - (u - x^2)}{y}, \\ 2x + yF' - F - yF' &= \frac{2xy - yF}{y}, \\ 2x - F &= 2x - F, \end{aligned} \tag{28}$$

para qualquer *F* que seja diferenciável pelo menos uma vez.

**4 - Caso 2 – Coeficientes com x e y, com dependência em u.**

Avançando um pouco mais, vamos permitir uma dependência em u da seguinte forma:

$$u(x,y) = g(x,y,u) + h(x,y,u)F(r). \tag{29}$$

O *r* também pode ser função de *x*, *y* e *u*. Como antes, derivamos com relação às variáveis *x* e *y*,

$$\begin{aligned} u_x &= (D_x g) + (D_x h)F + h(D_x r)F', \\ u_y &= (D_y g) + (D_y h)F + h(D_y r)F'. \end{aligned} \tag{30}$$

Desta vez, como *g* também é função de *u*, usamos

$$(D_x g) \equiv g_x + g_u u_x, \qquad \text{etc.} \tag{31}$$

Em forma matricial, o sistema de equações (30) fica

$$\begin{pmatrix} u_x - (D_x g) \\ u_y - (D_y g) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (D_x h) & (D_x r) \\ (D_y h) & (D_y r) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F \\ hF' \end{pmatrix}. \tag{32}$$

Multiplicamos os dois lados pela matriz inversa da matriz quadrada,

$$\begin{pmatrix} F \\ hF' \end{pmatrix} = \frac{1}{(D_x h)(D_y r) - (D_y h)(D_x r)} \begin{pmatrix} (D_y r) & -(D_x r) \\ -(D_y h) & (D_x h) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_x - (D_x g) \\ u_y - (D_y g) \end{pmatrix}, \tag{33}$$

e daí determinamos

$$F = \frac{(D_y r)[u_x - (D_x g)] - (D_x r)\left[u_y - (D_y g)\right]}{(D_x h)(D_y r) - (D_y h)(D_x r)}. \tag{34}$$

Substituindo em (29), chegamos na EDO:

$$u = g + h\frac{(D_y r)[u_x - (D_x g)] - (D_x r)\left[u_y - (D_y g)\right]}{(D_x h)(D_y r) - (D_y h)(D_x r)}. \tag{35}$$

Usando determinantes:

$$(u - g)\begin{vmatrix} (D_x h) & (D_x r) \\ (D_y h) & (D_y r) \end{vmatrix} = h\begin{vmatrix} u_x - (D_x g) & (D_x r) \\ u_y - (D_y g) & (D_y r) \end{vmatrix}, \tag{36}$$

ou

$$(u-g)\begin{vmatrix} h_x+h_u u_x & r_x+r_u u_x \\ h_y+h_u u_y & r_y+r_u u_y \end{vmatrix} = h\begin{vmatrix} u_x-g_x-g_u u_x & r_x+r_u u_x \\ u_y-g_y-g_u u_y & r_y+r_u u_y \end{vmatrix}. \tag{37}$$

Por exemplo, se escolhermos

$$g = x^2,$$
$$h = u + y, \tag{38}$$
$$r = u - x,$$

então

$$\begin{array}{lll} g_x = 2x, & g_y = 0, & g_u = 0, \\ h_x = 0, & h_y = 1, & h_u = 1, \\ r_x = -1, & r_y = 0, & r_u = 1. \end{array} \tag{39}$$

Substituindo em (37), implica na equação

$$(u-x^2)\begin{vmatrix} u_x & 1+u_y \\ u_x-1 & u_y \end{vmatrix} = (u+y)\begin{vmatrix} u_x-2x & u_y \\ u_x-1 & u_y \end{vmatrix}, \tag{40}$$

que é a equação não linear

$$(u-x^2)u_x + (x^2+y-2ux-2xy)u_y = u - x^2, \tag{41}$$

e cuja solução geral vem de (29), com as devidas substituições:

$$u = x^2 + (u+y)F(u-x). \tag{42}$$

Vemos que $u$, a solução geral, aparece de forma implícita nesse caso. Se $F = 0$, $u = x^2$ é uma solução especial. Se $F$ for igual a uma constante $a$, então teremos

$$u = x^2 + a(u+y), \tag{43}$$

e isso mostra que

$$u = \frac{x^2 + ay}{1 - a} \tag{44}$$

também é solução, etc. Muitas soluções serão transcendentais, ou seja, não podem ser escritas explicitamente.

**5 - Caso 3 – Coeficientes com 3 variáveis independentes, com dependências em u.**

Avançando mais um passo, além de *u*, agora vamos colocar uma dependência em *z* nos coeficientes:

$$u(x,y,z) = g(x,y,z,u) + h(x,y,z,u)F(r_1,r_2). \tag{45}$$

Os $r_i$ também podem ser funções das 3 variáveis e do *u*:

$$r_j = r_j(x,y,u).$$

Como o número de variáveis aumentou para 3, *F* agora será uma função arbitrária de duas variáveis $r_1$ $e$ $r_2$. A equação em si é uma restrição que acaba impondo uma relação entre as variáveis independentes, por isso *F* será sempre função do número total de variáveis independentes menos um. Quando *u*(*x*) depende de apenas uma variável *x*, *F* não depende de nenhuma, e por isso é constante. É a constante de integração das equações diferenciais ordinárias.

Derivamos com relação às variáveis independentes *x, y* e *z*.

$$\begin{aligned} u_x &= (D_x g) + (D_x h)F + h(D_x r_1)F_1 + h(D_x r_2)F_2, \\ u_y &= (D_y g) + (D_y h)F + h(D_y r_1)F_1 + h(D_y r_2)F_2, \\ u_z &= (D_z g) + (D_z h)F + h(D_z r_1)F_1 + h(D_z r_2)F_2. \end{aligned} \tag{46}$$

onde

$$F_1 = \frac{\partial F}{\partial r_1}, \qquad F_2 = \frac{\partial F}{\partial r_2}. \tag{47}$$

A partir dessas 3 relações devemos achar o *F*. De (46) temos o sistema:

$$\begin{pmatrix} u_x - (D_x g) \\ u_y - (D_y g) \\ u_z - (D_z g) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (D_x h) & (D_x r_1) & (D_x r_2) \\ (D_y h) & (D_y r_1) & (D_y r_2) \\ (D_z h) & (D_z r_1) & (D_z r_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F \\ hF_1 \\ hF_2 \end{pmatrix}, \tag{48}$$

e precisamos apenas do *F*:

$$F = \begin{vmatrix} u_x - (D_x g) & (D_x r_1) & (D_x r_2) \\ u_y - (D_y g) & (D_y r_1) & (D_y r_2) \\ u_z - (D_z g) & (D_z r_1) & (D_z r_2) \end{vmatrix} / \Delta, \tag{49}$$

onde

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} (D_x h) & (D_x r_1) & (D_x r_2) \\ (D_y h) & (D_y r_1) & (D_y r_2) \\ (D_z h) & (D_z r_1) & (D_z r_2) \end{vmatrix} \tag{50}$$

é o jacobiano de *h* e dos $r_i$, e portanto não pode se anular. Substituindo *F* em

$$u = g + hF, \tag{51}$$

chegamos na EDP requerida:

$$(u - g) = h \frac{\begin{vmatrix} u_x - (D_x g) & (D_x r_1) & (D_x r_2) \\ u_y - (D_y g) & (D_y r_1) & (D_y r_2) \\ u_z - (D_z g) & (D_z r_1) & (D_z r_2) \end{vmatrix}}{\Delta}, \tag{52}$$

$$(u - g) \begin{vmatrix} (D_x h) & (D_x r_1) & (D_x r_2) \\ (D_y h) & (D_y r_1) & (D_y r_2) \\ (D_z h) & (D_z r_1) & (D_z r_2) \end{vmatrix} = h \begin{vmatrix} u_x - (D_x g) & (D_x r_1) & (D_x r_2) \\ u_y - (D_y g) & (D_y r_1) & (D_y r_2) \\ u_z - (D_z g) & (D_z r_1) & (D_z r_2) \end{vmatrix}, \tag{53}$$

ou, mais explicitamente,

$$(u-g)\begin{vmatrix} h_x + h_u u_x & r_{1,x} + r_{1,u} u_x & r_{2,x} + r_{2,u} u_x \\ h_y + h_u u_y & r_{1,y} + r_{1,u} u_y & r_{2,y} + r_{2,u} u_y \\ h_z + h_u u_z & r_{1,z} + r_{1,u} u_z & r_{2,z} + r_{2,u} u_z \end{vmatrix} =$$

(54)

$$= h\begin{vmatrix} u_x - g_x - g_u u_x & r_{1,x} + r_{1,u} u_x & r_{2,x} + r_{2,u} u_x \\ u_y - g_y - g_u u_y & r_{1,y} + r_{1,u} u_y & r_{2,y} + r_{2,u} u_y \\ u_z - g_z - g_u u_z & r_{1,z} + r_{1,u} u_z & r_{2,z} + r_{2,u} u_z \end{vmatrix}.$$

Exemplo: Se tomarmos

$$\begin{gathered} g = x - y, \quad r_1 = z - u, \\ h = y - z, \quad r_2 = u - x, \end{gathered} \tag{55}$$

a equação será não linear:

$$u_x + u_z + \frac{u + y - x}{u - x + z} u_y = 1, \tag{56}$$

com solução geral

$$u = x - y + (y - z)F(z - u, u - x). \tag{57}$$

Uma solução especial é obtida fazendo $F = 0$, $u = x - y$, e uma outra seria, por exemplo,

$$u = x - y + (y - z)(z - x). \tag{58}$$

**6 - Caso 4 – Coeficientes com n variáveis independentes, com dependências em u.**

Finalmente vamos chegar ao caso mais geral a que nos propusemos, estendendo o problema para um caso com *n* variáveis independentes. Como há apenas uma função arbitrária, a equação continuará a ser de primeira ordem, mas a função arbitrária será função de *n* – 1 variáveis independentes.

$$u(x_1, x_2 \dots x_n) = g(x_1, x_2 \dots x_n, u) \\ + h(x_1, x_2 \dots x_n, u) F(r_1, r_2, \dots, r_{n-1}). \quad (59)$$

Os $r_i$ também podem ser funções de n variáveis e do *u*:

$$r_j = r_j(x_1, x_2 \dots x_n, u).$$

Derivamos com relação à variável $x_i$,

$$u_i = (D_i g) + (D_i h)F + h \sum_{j=1}^{n-1} (D_i r_j) F_j, \quad (60)$$

onde

$$(D_i g) = \frac{\partial g}{\partial x_i} + g_u \frac{\partial u}{\partial x_i}, \qquad \text{etc.} \quad (61)$$

A partir das *n* equações

$$u_i = (D_i g) + (D_i h)F + h \sum_{j=1}^{n-1} (D_i r_j) F_j \quad (62)$$

devemos achar os $F_j$. De (60) temos o sistema:

$$\begin{pmatrix} u_1 - (D_1 g) \\ u_2 - (D_2 g) \\ \dots \\ u_n - (D_n g) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (D_1 h) & (D_1 r_1) & \dots & (D_1 r_{n-1}) \\ (D_2 h) & (D_2 r_1) & \dots & (D_2 r_{n-1}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (D_n h) & (D_n r_1) & \dots & (D_n r_{n-1}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F \\ hF_1 \\ \dots \\ hF_n \end{pmatrix}, \quad (63)$$

e precisamos apenas do *F*:

$$F = \begin{vmatrix} u_1 - (D_1 g) & (D_1 r_1) & \dots & (D_1 r_{n-1}) \\ u_2 - (D_2 g) & (D_2 r_1) & \dots & (D_2 r_{n-1}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_n - (D_n g) & (D_n r_1) & \dots & (D_n r_{n-1}) \end{vmatrix} / \Delta, \quad (64)$$

onde

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} (D_1h) & (D_1r_1) & \dots & (D_1r_{n-1}) \\ (D_2h) & (D_2r_1) & \dots & (D_2r_{n-1}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (D_nh) & (D_nr_1) & \dots & (D_nr_{n-1}) \end{vmatrix}. \tag{65}$$

Substituindo *F* em

$$u = g + hF(r_1, r_2, \dots, r_{n-1}), \tag{66}$$

chegamos na EDP requerida:

$$(u-g) = h\frac{\begin{vmatrix} u_1-(D_1g) & (D_1r_1) & \dots & (D_1r_{n-1}) \\ u_2-(D_2g) & (D_2r_1) & \dots & (D_2r_{n-1}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_n-(D_ng) & (D_nr_1) & \dots & (D_nr_{n-1}) \end{vmatrix}}{\Delta}, \tag{67}$$

Multiplicando ambos os lados por Δ,

$$(u-g)\begin{vmatrix} (D_1h) & (D_1r_1) & \dots & (D_1r_{n-1}) \\ (D_2h) & (D_2r_1) & \dots & (D_2r_{n-1}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (D_nh) & (D_nr_1) & \dots & (D_nr_{n-1}) \end{vmatrix} = \\ = h\begin{vmatrix} u_1-(D_1g) & (D_1r_1) & \dots & (D_1r_{n-1}) \\ u_2-(D_2g) & (D_2r_1) & \dots & (D_2r_{n-1}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_n-(D_ng) & (D_nr_1) & \dots & (D_nr_{n-1}) \end{vmatrix}, \tag{68}$$

ou, mais explicitamente,

$$(u-g)\begin{vmatrix} h_1+h_uu_1 & r_{1,1}+r_{1,u}u_1 & \dots & r_{n-1,1}+r_{n-1,u}u_1 \\ h_2+h_uu_2 & r_{1,2}+r_{1,u}u_2 & \dots & r_{n-1,2}+r_{n-1,u}u_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_n+h_uu_n & r_{1,n}+r_{1,u}u_n & \dots & r_{n-1,n}+r_{n-1,u}u_n \end{vmatrix} = \tag{69}$$

$$= h\begin{vmatrix} u_1-g_1-g_uu_1 & r_{1,1}+r_{1,u}u_1 & \dots & r_{n-1,1}+r_{n-1,u}u_1 \\ u_2-g_2-g_uu_2 & r_{1,2}+r_{1,u}u_2 & \dots & r_{n-1,2}+r_{n-1,u}u_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_n-g_n-g_uu_n & r_{1,n}+r_{1,u}u_n & \dots & r_{n-1,n}+r_{n-1,u}u_n \end{vmatrix}.$$

Não é difícil verificar que (66) é realmente solução de (69). Basta fazer *u – g = hF* em (68),

$$hF\begin{vmatrix}(D_1h) & (D_1r_1) & \dots & (D_1r_{n-1})\\ (D_2h) & (D_2r_1) & \dots & (D_2r_{n-1})\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ (D_nh) & (D_nr_1) & \dots & (D_nr_{n-1})\end{vmatrix} = h\begin{vmatrix}(D_1hF) & (D_1r_1) & \dots & (D_1r_{n-1})\\ (D_2hF) & (D_2r_1) & \dots & (D_2r_{n-1})\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ (D_nhF) & (D_nr_1) & \dots & (D_nr_{n-1})\end{vmatrix}, \qquad (70)$$

e como

$$(D_ihF) = F(D_ih) + h(D_iF),$$

$$(D_iF) = (D_ir_j)F_j, \qquad (71)$$

então

$$hF\begin{vmatrix}(D_1h) & (D_1r_1) & \dots & (D_1r_{n-1})\\ (D_2h) & (D_2r_1) & \dots & (D_2r_{n-1})\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ (D_nh) & (D_nr_1) & \dots & (D_nr_{n-1})\end{vmatrix}$$

$$= hF\begin{vmatrix}(D_1h) & (D_1r_1) & \dots & (D_1r_{n-1})\\ (D_2h) & (D_2r_1) & \dots & (D_2r_{n-1})\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ (D_nh) & (D_nr_1) & \dots & (D_nr_{n-1})\end{vmatrix} + h^2\begin{vmatrix}(D_1r_j)F_j & (D_1r_1) & \dots & (D_1r_{n-1})\\ (D_2r_j)F_j & (D_2r_1) & \dots & (D_2r_{n-1})\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ (D_nr_j)F_j & (D_nr_1) & \dots & (D_nr_{n-1})\end{vmatrix}. \qquad (72)$$

Lembrando que, como antes, o índice *j* repetido indica somatória em *j*. Resta mostrar que o último determinante se anula. Para isto colocamos em evidências cada $F_j$:

$$\begin{vmatrix}(D_1r_j)F_j & (D_1r_1) & \dots & (D_1r_{n-1})\\ (D_2r_j)F_j & (D_2r_1) & \dots & (D_2r_{n-1})\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ (D_nr_j)F_j & (D_nr_1) & \dots & (D_nr_{n-1})\end{vmatrix} = h\sum_{j=1}^{n-1} F_j\begin{vmatrix}(D_1r_j) & (D_1r_1) & \dots & (D_1r_{n-1})\\ (D_2r_j) & (D_2r_1) & \dots & (D_2r_{n-1})\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ (D_nr_j) & (D_nr_1) & \dots & (D_nr_{n-1})\end{vmatrix}. \qquad (73)$$

Como a somatória em *j* vai de 1 a *n*-1, há sempre uma coluna repetida no determinante da direita, e isso prova que ele é nulo. E como (66) satisfaz à equação e possui uma função arbitrária, representa a solução geral do problema.

Esta forma geral

$$(u-g)\begin{vmatrix}(D_1h) & (D_1r_1) & \dots & (D_1r_{n-1})\\ (D_2h) & (D_2r_1) & \dots & (D_2r_{n-1})\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ (D_nh) & (D_nr_1) & \dots & (D_nr_{n-1})\end{vmatrix} = h\begin{vmatrix}u_1-(D_1g) & (D_1r_1) & \dots & (D_1r_{n-1})\\ u_2-(D_2g) & (D_2r_1) & \dots & (D_2r_{n-1})\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ u_n-(D_ng) & (D_nr_1) & \dots & (D_nr_{n-1})\end{vmatrix}, \qquad (74)$$

fornece informações interessantes sobre propriedades das EDP. Por exemplo, vemos que escolher $h = u - g$ resulta em uma igualdade válida em (74), mas implica em $F = 1$, em (66), negando assim que seja uma solução geral, pois não há solução geral sem a função arbitrária. Se, por outro lado, escolhermos $h$ como sendo uma função arbitrária de $u - g$, $H(u - g)$, mas diferente de $u - g$, então, de (66),

$$u - g = H(u - g)F(r_1, r_2, \dots, r_{n-1}),$$

$$G(u - g) = F(r_1, r_2, \dots, r_{n-1}) \tag{75}$$

que pode ser resolvido para encontrar $u - g$,

$$u - g = f(r_1, r_2, \dots, r_{n-1}), \tag{76}$$

e equivale a simplesmente escolher $h = 1$.

A partir de (74) é possível se elaborar uma tabela de EDP com suas respectivas soluções, classificadas de acordo com seus coeficientes. Certamente (74) deve fornecer também valiosas informações sobre o fator de integração. A partir de (69) vemos que nesse tipo de equações não há a possibilidade de aparecer termos não lineares do tipo $u_x^2$, embora possa haver $u_x u_y u_z$, etc.

O fato de

$$u(x_1, x_2 \dots x_n) = g(x_1, x_2 \dots x_n, u) + h(x_1, x_2 \dots x_n, u)F(r_1, r_2, \dots, r_{n-1}). \tag{77}$$

ser a solução geral pode ser interpretado da seguinte forma: Mudanças de variáveis são feitas, de tal modo que

$$U = \frac{u - g}{h}, \tag{78}$$

$$(x_1, x_2 \dots x_n) \to (r_1, r_2, \dots, r_{n-1}, r_n) \tag{79}$$

de modo que a equação fique sendo

$$\frac{\partial U}{\partial r_n} = 0,$$

e a solução seja

$$U = F(r_1, r_2, \ldots, r_{n-1}). \tag{80}$$

Até aqui a explicação foi voltada para pessoas que tenham cursado Cálculo 1, 2, 3 e 4. O que vou escrever agora é para os que estão acostumados com operadores. Se definirmos o operador linear *L* tal que

$$L(h) = \begin{vmatrix} (D_1 h) & (D_1 r_1) & \ldots & (D_1 r_{n-1}) \\ (D_2 h) & (D_2 r_1) & \ldots & (D_2 r_{n-1}) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (D_n h) & (D_n r_1) & \ldots & (D_n r_{n-1}) \end{vmatrix}, \tag{81}$$

então (74) pode ser escrito simplesmente como (*u* - *g*) *L*(*h*) = *h* *L*(*u*-*g*). E como *L*(*hF*) = *F* *L*(*h*), fica evidente que *u* = *g* + *hF* é solução.

## 7 - Obtendo a equação diretamente, via computador

Um programa pode ser facilmente implementado de modo que um computador forneça a equação desejada. O aplicativo REDUCE é de distribuição gratuita e pode ser baixado no site https://sourceforge.net/projects/reduce-algebra/. Damos abaixo o código com um exemplo. Basta copiar o texto e colar no REDUCE, que ao final a equação diferencial aparecerá, com ux representando $u_x$, etc. As funções g, h, r1 e r2 devem ser fornecidas.

```
% A solução é u = g + h*F(r1,r2);
% Funções a ser fornecidas;
g:=x+y+z;
h:=u-x;
r1:=x+z;
r2:=x+y;

% Derivando as funções dadas;
gx:=df(g,x);gy:=df(g,y);gz:=df(g,z);gu:=df(g,u);
hx:=df(h,x);hy:=df(h,y);hz:=df(h,z);hu:=df(h,u);
r1x:=df(r1,x);r1y:=df(r1,y);r1z:=df(r1,z);r1u:=df(r1,u);
r2x:=df(r2,x);r2y:=df(r2,y);r2z:=df(r2,z);r2u:=df(r2,u);

g_x:=gx+gu*ux;
g_y:=gy+gu*uy;
g_z:=gz+gu*uz;
```

```
h_x:=hx+hu*ux;
h_y:=hy+hu*uy;
h_z:=hz+hu*uz;

r1_x:=r1x+r1u*ux;
r1_y:=r1y+r1u*uy;
r1_z:=r1z+r1u*uz;

r2_x:=r2x+r2u*ux;
r2_y:=r2y+r2u*uy;
r2_z:=r2z+r2u*uz;

% Calculando os determinantes;

matug:=mat((ux-g_x,uy-g_y,uz-g_z),(r1_x,r1_y,r1_z),(r2_x,r2_y,r2_z)); %matriz com u-g;
matuh:=mat((h_x,h_y,h_z),(r1_x,r1_y,r1_z),(r2_x,r2_y,r2_z)); % matriz com h;
detug:=det(matug);detuh:=det(matuh); %determinantes;
factor ux, uy, uz;

% Equação procurada;

equa:=num(h*detug-(u-g)*detuh); % tira o numerador;
```

Para usar sem a coordenada z, basta fazer r2 = z.

## 8 - Agradecimentos

Agradeço profundamente a Fernando Machado Matias, autor do livro “O Tratado do Zero”, pela revisão criteriosa do texto, e a Celeste Carneiro pela oportunidade de divulgação.

## 9 - Conclusão

Uma fórmula geral para, a partir de uma solução geral dada, encontrar a equação diferencial a derivadas parciais de primeira ordem, incluindo casos não lineares, com um número arbitrário de variáveis independentes, é fornecida. O processo usado foi a eliminação da função arbitrária por meio de derivadas da função dependente *u*. Espera-se que este trabalho seja útil a professores que ministrem o Método das Características e necessitem criar equações para seus exercícios de aplicação, aos estudiosos desse assunto, e a todos que se interessem por soluções de equações diferenciais parciais.

## 10 - Bibliografia:

de Lima, Paulo Cupertino; **Equações Diferenciais Parciais I,** Departamento de Matemática – UFMG, Agosto, 2013.

Disponível em: http://150.164.25.15/~lima/apostilas/EDP1-aulas-22-8-13.pdf. Acesso em 13/12/2021.

Cerqueira, Stenio Henrique do Nascimento; Soares, Josué de Jesus**, Método das curvas características para solução de equações diferenciais parciais de primeira ordem**, Repositório Institucional UFSC, 2009, Disponível em: https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/107658, Acesso em 13/12/2021.

Santos, Gildemar Carneiro, **Método das características,** Canal do Youtube: *Professor, não. Gildemar*, 2021, Disponível em: https://youtu.be/f7kqtLVxR2A. Acesso em 13/12/2021.

Method of Characteristics, **Wikipedia, 2021,** Disponível em: https://en.wikipedia.org/wiki/Method_of_characteristics. Acesso em 13/12/2021.

11 - Para saber mais:

IÓRIO Jr, Rafael/Iório, Valéria. Equações Diferenciais Parciais: Uma Introdução. Projeto Euclides, IMPA.